对称在艺术与科学中的作用

1　介绍

数学是什么？对这个问题，我们有很多的答案。一种回答就是，数学是研究数与形的科学。这种研究的一个非常重要的方面就是要理解现象背后的结构与规律，更确切的说，就是隐含的对称。

既然数学一贯都被认为是理解自然界和宇宙的基本语言，我们当然有理由相信，"对称"将会在诸如艺术，文学和自然科学的方方面面扮演重要的角色。

在本文中，我们讨论几个艺术，建筑和自然科学中的例子，其中将会看到对称的观念起了怎样的关键作用。我们将带着读者领略浩瀚文献中所描述的"对称"，及其广泛的应用。下面是我们所要讨论的专题目录：

感谢 作者感谢他的夫人——王岚在准备这篇文章过程中所给予的帮助。徐浩翻译了本文，周诚放帮助整理了文中的图片，一并表示感谢。

2　什么是对称

根据《美国传统字典》，"对称"是一条边界（例如平面或直线）两侧，或者绕着圆心的形态与排列的对应。

根据《牛津字典》，"对称"是一种结构，使得物体可以被分割成形状和大小相同的几部分，或者是物体关于边界和中心的类似重复。

我们要举的第一个例子，也许是大多数中国人最熟悉的，是北京的天坛。

Fig 0. 北京天坛

试想你沿着天坛的台阶拾级而上，一定会感受到一种和谐的美感。这座沿着道路中轴对称的建筑展现了令人折服的庄严与肃穆，这是反射对称（或镜像对称）的例子。

再看一下印度阿格拉的泰姬陵，建于 1632-1643 年，是莫卧儿王朝帝王沙贾汉为爱妃泰吉·马哈尔所造。据传当年沙贾汉听闻爱妃先他而去的消息后，竟一夜白头。

Fig 1. 泰姬陵

这座建筑也是沿中心线对称的。除了整体上的对称，局部上也遵循了对称美的原则。

下面的建筑是希腊雅典的帕台农神庙，建于公元前 448-432 年。

Fig 2. 帕台农神庙（再找一张）

无论从前方或侧面看，它都是对称的。而它的柱子呈周期分布，也体现了一种平移对称。

下面的盂鼎铸造于西周晚期，约公元前 1100-1000 年，也具有镜像的对称。

Fig 2.1. 盂鼎

日本镰仓的大佛建于 1252 年，体现了反射对称。

Fig 3. 日本大佛

这里还有一个具有复杂对称性的建筑，北京的一座石塔。

Fig 3.1. 北京的石塔

如果你在春暖花开的时节走进公园，你会看到争妍斗丽的百花大都是对称的。比如，冬乌头就是旋转对称的。

Fig 4. 冬乌头

有些花还带有更多的对称，比如大丽花。

Fig 5. 大丽花

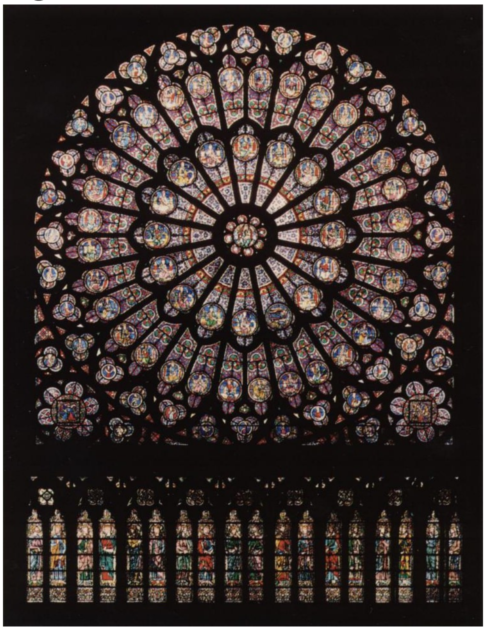
除了旋转对称，大丽花还有一种由内而外、层次鲜明的对称。多重对称的叠加让花朵更加的艳丽。

另一个旋转对称的美妙实例就是西班牙科多巴市的清真寺庙的圆屋顶。

Fig 6. 西班牙清真寺圆屋顶

巴黎圣母院北边墙面上的巨大的玫瑰窗，有着五彩华丽的旋转对称，令人叹为观止。它建于 1250 年，圆面的直径大约是 40 英尺。

Fig 6.1. 巴黎圣母院的玫瑰窗



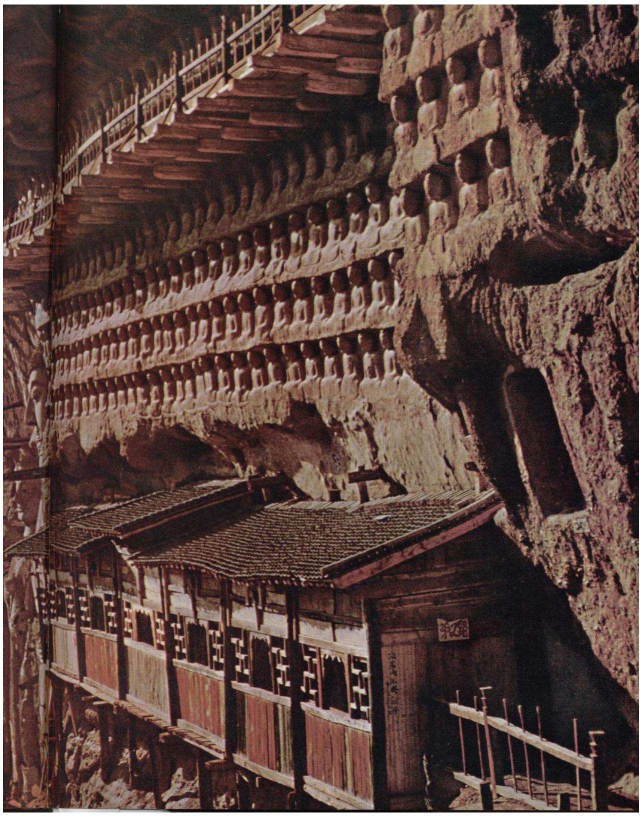
我们前面提到过，雅典帕台农神庙的柱子市平移对称的。这里我们再给出三个例子。第一个是法国噶尔德桥下的导水渠，建于罗马时期。

Fig 7. 法国导水渠

它有三层。虽然每层都有不同的样式，可是我们还是可以看出某种相似性在里面。

第二个例子是我国西北麦积山石窟的千佛廊，建于公元 500 年左右。上下两层排列着 258 尊魏代石胎泥塑佛像。

Fig 7. 1. 佛像



约旦 Khirbat-al-Mafjar 宫殿的方格地板的图案具有两种平移对称。

Fig 8. 约旦宫殿的地板

另一个平移对称的例子是南太平洋的复活节岛上的石雕人像，雕刻于公元 1000-1600 年。

Fig 9. 复活节岛石像

有的石像重量超过 50 吨。让人费解的是，为什么这些石像会出现在这个小岛上？在没有现代化起重机的帮助下，这些石像是如何竖立起来的？

在上面的所有例子中，都包含着一个保持物体形状或模式不变的等距群。前两张图的等距群是由相对于中线的反射生成的二阶群。在第二组图片中，是一个由旋转构成的有限群。在最后的一组图片中，如果假设物体延伸到无穷远处，那么就有一个无穷的平移变换群作用在其上，并且保持模式不变。

在这些图片的基础上，我们可以从数学上给出一个物体“对称”的定义，即有一些非平凡的等距作用在其上。明显的，这样的等距全体构成了一个群，并把物体分成了相同的几个部分（也就是等距群基本区域的平移），如同我们在这一节开头所介绍的那样。

同样的，我们成一个物体是非对称的，如果不存在非平凡等距作用在其上。给了两个物体 A 与 B，如果 A 的等距群包含了 B 的等距群，那么我们就说 A 比 B 更加的对称。

为了更好的表述这些概念，我们考虑如下四个图形，圆，正方形，长方形和一个不规则的四边形。

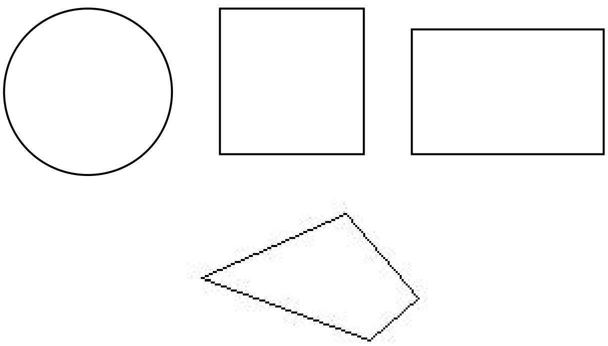


Fig 10. 四个图形

明显的，最后这个四边形不是“对称”的。同样，直觉告诉我们，圆是最对称的，正方形比长方形更加的对称。事实上，圆的等距群是无穷的，并且包含了正方形的有限等距群，而后者又包含了长方形的等距群。

3．破缺的对称

人生不可能是尽善尽美的。我们也很难找到一朵花是完美无缺的。虽然人体总的来说是左右对称的，可是这种对称远远不是完全的。每个人左右手的粗细不一样，一只眼睛比另一只眼睛更大或更圆，耳垂的形状也不同。最明显的，就是每个人只有一个心脏，通常都在靠右的位置（当然也有极少数人的心脏在左侧）。

不仅日常生活中我们会有意的打破对称，艺术家有时也会极力的创造出不对称的图像和物体，可是仍然给人以和谐与平衡的美感。我们以仰韶文化的一个陪葬用的器皿为例，这也许可算是最古老的实物之一。

Fig 10.1. 陪葬器皿

这件看起来似乎工整的器皿其实并不对称。除了明显的不太完美的反射对称外，瓶颈处的贴瓷也是对称的。

请看建于 1145 年的法国沙特尔大教堂。

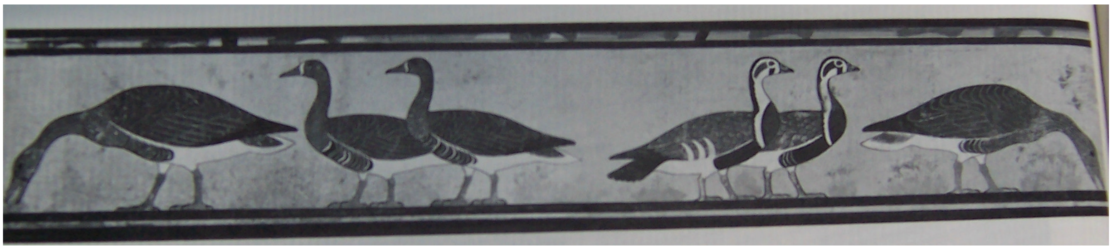
Fig 11. 不对称的教堂

教堂在塔楼以下的部分是反射对称的。同样在局部上也有许多的对称。例如，中间的窗子是旋转对称的。试想一下，如果塔楼也是对称的，那么这座教堂看起来也许就没有现在那么吸引人了。

许多人也许会有这样的共识，脸上如果有一个美人痔，那么会让人眼前一亮，可是如果有两个对称的美人痔，肯定会让人觉得不舒服。

下面是一副大约公元前 2530 年的埃及古画，其中鹅的排列是对称的，可是两边的鹅却着上了不同的颜色。读者不妨体会一下，到底是对称的着色还是现在这样比较好。

Fig 12. 鹅，埃及古画



有时候对称会以一种非常微妙的方式出现。比如，看一下建于公元前 486－460 年的奥林匹亚宙斯神庙的西门的三角楣上的雕塑，它的外轮廓（或者用数学的语言来说就是闭包）呈现出反射对称性，并且中线两边的人数相等。可是两边的塑像却有着天壤之别。

Fig 13. 宙斯神庙

破缺对称另一个例子是下面这幅镶嵌画，讲述的是耶稣用发五条鱼，两个饼让五千信徒吃饱的故事。

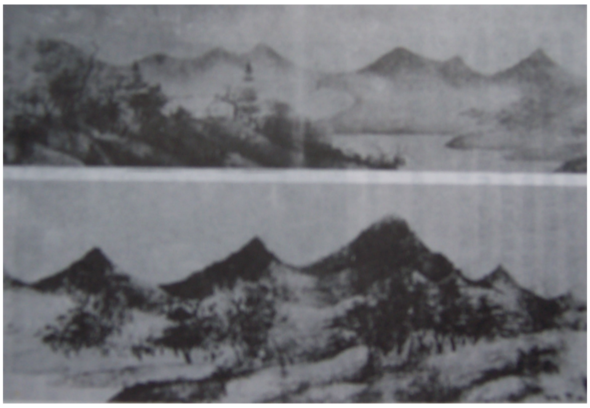
Fig 14. 圣经故事

这副 12 到 13 世纪的尼泊尔古画给出了破缺对称的另一个例子。

Fig 14.1. 尼泊尔古画

上面的例子都是反射对称的变体。平移对称的近似也出现在艺术中。例如，在宋朝著名画家米友仁的画中，山峰基本上是呈现周期变化的。

Fig 15. 米友仁的国画



另一个近似平移对称的例子是北京颐和园内沿着湖岸的画廊。

Fig 15.1. 颐和园

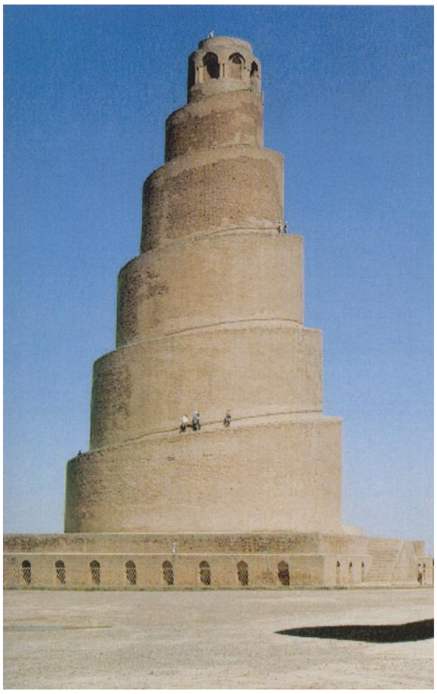
读者不妨分析一下，下面这幅郑板桥的竹画中是否也蕴含了平移对称呢。

4. 广义的对称

在许多情况下，和谐或有序来自于多种对称运算的组合。直线$\mathbb{R}$上的周期现象来自于一个给定非零实数的叠加。在指数映射$\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$下，$\mathbb{R}$上的平移就转换成正的半直线$\mathbb{R}_{>0}$上的乘法。我们给出两个从平移，旋转和比例变换产生出有序模式的例子。

第一个是伊朗沙马拉的清真寺，建于公元 848－852 年。其中的塔楼把垂直平移，水平面上的旋转，以及比例变换结合了起来。

Fig 16. 清真寺的塔楼

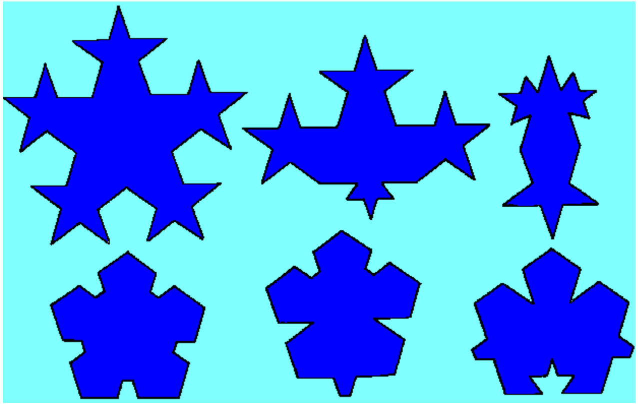


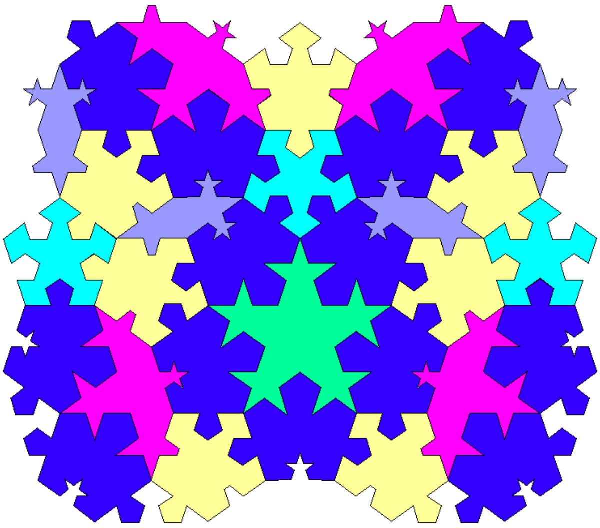
第二个例子是鹦鹉螺的壳，是旋转与比例变换的完美结合。

Fig 17. 鹦鹉螺的壳

另一类对称的变体就是，虽然局部上是对称的，可是不存在整体的对称。一个著名的例子是彭罗斯平铺，这是非周期的。

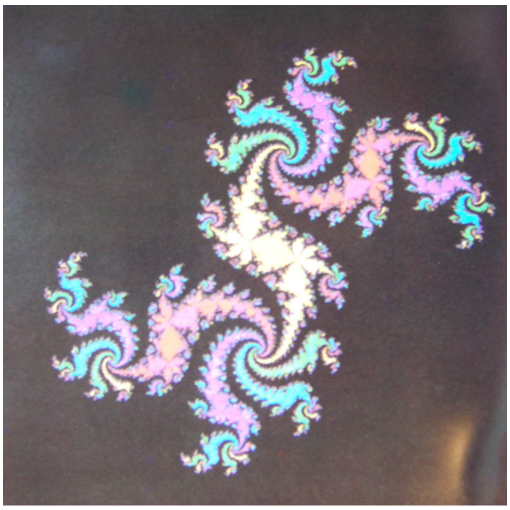
Fig 18. 彭罗斯平铺





分形是用来处理不规则形状的。可是它们有着众多的局部对称。事实上，在比例变换下，这种模式不断重复出现。在这种意义下，它有着丰富的局部对称性。人们创造了有许多漂亮的分形图片，下面就是其中一张。

Fig 19. 分形



5 对称背后的数学

如我们前面所定义的，平面上一个物体如果有一个非平凡的对称群作用，则称它是对称的。所以对称现象背后的数学就是群论。

群论是法国青年数学家伽罗华为了用根式来解决代数方程而引入的。

Fig 20. 伽罗华

我们知道任意二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 可以用根式来解。16 世纪时人们就发现三次和四次代数方程可以用根式来解。对于高次方程一直都不得其解，直到 19 世纪阿贝尔证明了，对 5 次以上方程，不存在一个一般解的公式。

对于某些特殊的高次方程，仍然可以用根式来解。伽罗华用代数方程的对称性给出了方程可解的精确条件。他的结论也许有些令人惊讶：如果方程具有过多对称的话，那么就不能用根式来解。（这似乎有悖于人们的认识，丰富的对称性通常可以让问题得到简化。所以对于对称的合理解释就显得非常重要）

考虑下面三个方程

$$(x-1)^5=0$$

$$(x^4-6x^2+5)(x-2)=0$$

$$a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6=0$$

其中 $a_1,\cdots,a_6$ 是随机选取的整数。

我们应该怎样定义一个方程的对称性，已及对称程度的比较？精确的定义需要相当的技巧。我们可以粗略的描述为，每个方程都有一个有限群，称为伽罗华群。伽罗华群越大，就越对称。

第一个方程有平凡的对称（或者干脆说没有对称），所以可以很容易解出，即 $x=1$。第二个方程的对称性也很小，所以方程可以用根式解出：

$x_1=2, x_2=-1, x_3=1, x_4=-\sqrt{5}, x_5=-\sqrt{5}$ 。

也许稍有些意外的是，最后这个具有随机系数的方程是最对称的，所以不能够用根式解出。根据通常的认识，随机性与对称性应该是背道而驰的，所以我们

会倾向于认为一个具有随机系数的方程不是对称的。可是在许多情况下，我们也看到随机是被某些对称所支配的。另一个例子是，随机矩阵的特征值分布是由多种对称性支配的（参看文章[KS]或本文的第 11 节）。这种现象可以用中国的一句成语来描述，就是“物极必反”。

伽罗华群是有限的。我们前面遇到的对称群，除了直线□ 上的平移群以外，也都是有限的。

所有实数集合□ 构成一个群，直线上周期现象的平移群是它的一个子群。

□ 是挪威数学家索菲斯·李所引入的李群的一个重要例子。

Fig 21. 索菲斯·李（Lie）

李群通常是不可数的，并且有非平凡的拓扑，虽然它们包含某些有限群与离散子群作为特例。另一个重要的例子是$□^n$中全体正交变换构成的群$O(n)$，一个非交换（或非阿贝尔）群。另一个稍大的群是$□^n$中的全体可逆线性变换构成的群$GL(n,□)$。另一个重要的例子是作用在$□^n$上的特殊酉群$SU(n)$。

在数学中，对称的概念经常与李群的概念等同起来。我们称一个对象（或一个系统，一个映射，一个微分方程）具有由一个李群 G 所给定的对称，当这个群 G 保持不变地作用在其上，或者满足某个简单的变换条件。

比如，我们熟知$\sin 2\pi x$以 1 为周期，所以在平移群□ 的作用下保持不变。函数$\sin 2\pi x$的图像是一个波。下面的画出自一位日本画家 Ogata Koran(1658-1716)之手，包含了许多这种波。

Fig 21.1. 日本画－波

虽然函数e^x不是周期的，它在平移作用下满足一个简单的公式：$e^{x+1} = ee^x$，

所以 e^x 相对于平移群，也享有某种对称性。这种连续的比例变换是中国山水画的重要组成部分。

6 正多边形与正多面体

代数方程的伽罗华群论也许有些抽象和形式化。让我们回到对称的更加几何直观的概念。

如同前面所提到的那样，正方形比长方形更加的规则。事实上，正方形是正多边形的一种。一个正多边形满足（1）所有的边长都相等；（2）相邻边夹成的角度都相等。

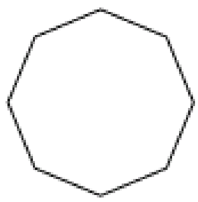


Fig 22. 正多边形的例子

当边数趋于无穷时，正多边形就收敛到圆，所以圆可以解释为完美理想的正多边形。

每个正多边形具有反射和旋转对称性，在相同边数的多边形中无疑是对称程度最高的。另一方面，在艺术和建筑中，常用的往往是那些非等边的三角形。比如帕台农神庙顶部的三角形，还有金字塔就不是等边的。非常受欢迎的是黄金三角形和相应的黄金分割。关于黄金分割及其应用的详细讨论，请参看[Li]。

在拉斐尔的名画“牧场圣女”中，我们可以看到其中的许多三角形。我们留给读者一个小练习，就是找出其中一共有多少个三角形。

Fig 23. 拉斐尔的名画

圆周是理想化的正多边形，具有无穷的对称性。它在中国传统艺术中被广为使用。我们给出几个例子。

第一个是山东梁帝墓（约公元 150 年）

Fig 24. 梁帝墓

如同车轮的圆代表着运动。圆形图案也传达了一种和谐与宁静。

第二个是南京萧景墓前的带翅石狮。

Fig 25. 萧景墓前的带翅石狮

另一个例子是公元前 10 世纪的周朝尖牙虎铜雕

Fig 25.1. 周朝尖牙虎铜雕

圆形代表了一种向上运动的感觉，可是它也传达着权势和实力。它也透露着宁静的气息。事实上，在中国园林设计中，圆形图案占了很大的比重。看一下苏州园林的两处门洞。

Fig 25.2. 苏州园林

正多边形到三维欧氏空间□^{3}的推广，就是正多面体。与二维情形不同，一共只有 5 种正多面体。

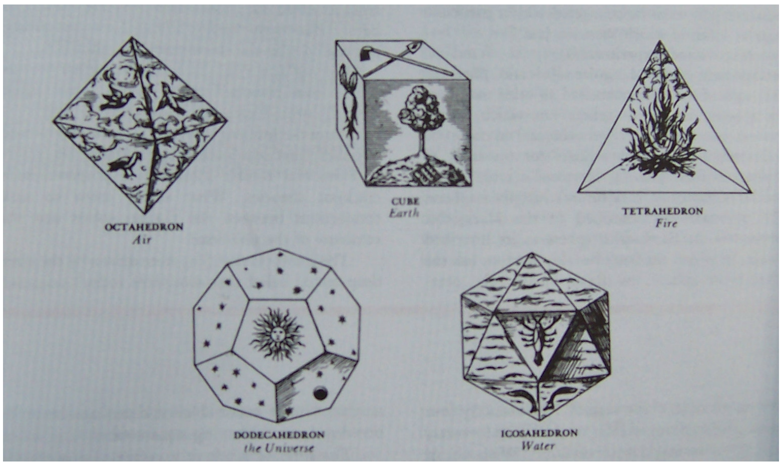
由于圆周的良好性质，它是所有等长曲线中包围面积最大的。同样的，三维欧氏空间□^{3}中的球面也具有同样的极值性质。这也解释了为何肥皂泡都是球形的（还有热气球）。

由定义，一个多面体被称为正多面体，如果满足下面的条件：

1．它被有限多个平面包围，每个面都是正多边形；
2．所有面在等距下都是相同的；
3．所有相邻平面间的二面角都相等。

明显的，立方体是正多面体。其它四个正多面体是：正四面体，正八面体正十二面体和正二十面体。它们的等距群是 $O(3)$ 的有限子群，并且可以具体的计算出来。

Fig 26. 正多面体



事实上，恩贝多克利（Empedocles，公元 490-430 年）认为，万物都是由四种基本元素构成的：火，空气，水和土。这个理论在希腊被广泛接受。

既然正多面体是完全理想化的，而世界也是完美的，柏拉图于是提出，世界是由正多面体构成的。火对应于正四面体，正二十面体有着最多的面，最易滑动，就对应于水，土就是正立方体，空气就是正八面体。剩下的正十二面体就代表宇宙。由于等边三角形存在于正四面体，正八面体和正二十面体中，所以火，空气和水可以相互转换，但不能转换成正立方体代表的土。

开普勒用正多面体建立了行星运动理论。所以人们相信正多面体在微观和宏观上都起着统治作用。

正多面体理论及其推广在数学中非常重要，比如，在 Coxeter 的反射群理论，以及李群论和圈形簇理论中。

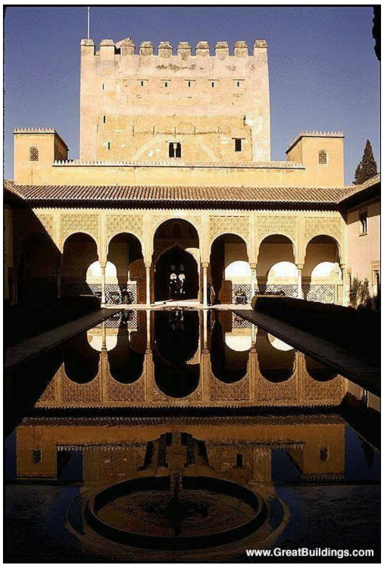
关于多面体的轻松而又详细的讨论，可以看[Cr]和经典专著[Co]。

7 平移对称，晶体与拟晶体

平移对称自然地出现在晶体中，还有贴墙纸和铺瓷砖也不例外。

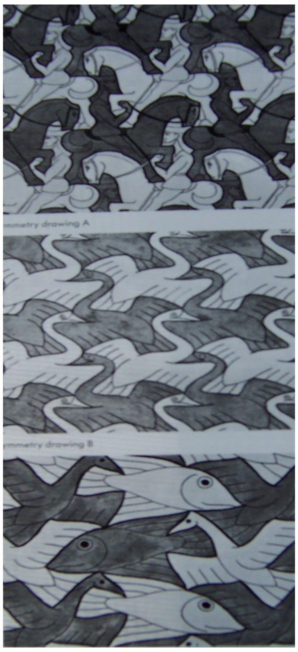
位于西班牙格兰纳达的阿尔汗布拉宫的墙壁装饰，很好地展现了二维的对称。

Fig 27. 阿尔汗布拉宫墙纸



如下是著名版画家 Escher 的作品

Fig 28. Escher 作品



与这种模式相关的是数学中“格”的概念。回忆一下，$\mathbb{R}^2$ 中的各是指由两个线性无关向量 v_1, v_2 生成的离散子群，$L = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$。

一个明显的格是 $\mathbb{Z}^2$，它由 $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)$ 生成。基于这个格的平铺如下所示：

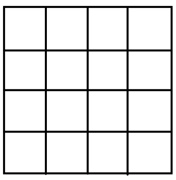


Fig 29. 方格平铺

明显的，这种平铺在$\square^2$的平移作用下保持不变。可是它还有其它的对称，比如，相对于任意一个角旋转 45 度，或者相对于对角线的反射。方格平铺的对称性与格$\square^2$的对称性一致。

记$G = I(\square^2)$为$\square^2$的等距变换群。那么任意格的等距群就是 G 的子群，称为晶体群。它包含 L 作为有限指数的子群。

晶体群在晶体的研究中起了重要的作用。格的结构决定了许多性质，特别是晶体的电子性质。基本的原因在于，相对于格的周期函数的谱理论确实依赖于格的性质。这种对称性在理解晶体中 X 射线折射的内在性质方面发挥了重要的作用。

晶体的对称性体现在分子的排列上。其实，对称性的考虑在原子级别上也很重要。参看[HD]。下面我们还将看到，对称在亚原子粒子中也很重要。同样，对称也在研究恒星，太阳系的和整个宇宙的天体物理学中起着重要的作用。

大家最熟悉的晶体也许是（小颗的）钻石。可是巨大的晶体结构也在自然界中存在，比如，爱尔兰的巨人石道。每根柱子的截面就是近似的正六边形，与蜂窝类似。

Fig 30. 爱尔兰巨人石道

虽然原则上有无穷多种墙纸的设计方案。只有 17 种（或在仿射变换群作用下的共扼类）不同的晶体群。注意不是在等距群下的共扼类。为了解释这种差异，我们注意到所有格都在某个仿射变换，而不是等距群下共扼。

回忆每个晶体群Λ包含平移子群 L，并且商Λ/L是一个作用在 L 上的有限正交群，称为格的点群。$(\Lambda/L, L)$这样的对称为 Bravais 格。我们发现刚好有 14 个 Bravais 格。17 与 14 的差别在于Λ不是由$(\Lambda/L, L)$唯一确定的。更多的讨论，请参看[We][St][SK]。

值得一提的是，一般的$\square^n$中的晶体群等价类的有限性是著名的希尔波特第

十八问题。这已经被 Bieberbach 在 1910 年完全解决了。详细的分类是很困难的。比如，在三维有 230 种不同类型。

Fig 31. 希尔伯特与 Bieberbach


希尔伯特


Bieberbach

晶体群的分类不仅是数学上有趣的问题，在固体物理中也有重要应用。事实上，它在晶体的分类方面很重要，对于 1984 年拟晶体的发现也起了关键的作用。其实，按照晶体群的分类来看，1984 年发现的晶体化合物有着惊人的五重点群结构。

拟晶体具有拟周期性：它的排列并不完全重复，但是却具有很强的局部正则性。

生成拟晶体结构的一种典型的方法是，取非有理嵌入在□^{n}中的子空间 V，以及一个相对标准□ 结构有理的格结构（到周期平铺的分解）的交。

平铺允许我们可以用一种模式周期地覆盖住整个平面。一个自然的问题是，那种平铺可以用非周期的方式覆盖住整个平面。这被称为非周期平铺。一个著名的例子是我们前面提到的彭罗斯平铺。这种非周期平铺很自然地出现在拟晶体中。请参考彭罗斯的文章[Pe]。

如我们提到的那样，圆周在中国传统艺术中被广泛使用。我们现在给出一种平移对称的模式，或称比例变换对称：

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0,x} \to e^{x}$$

或 $$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0,x} \to e^{-x}$$

在这些映射下，$\mathbb{R}$ 的周期平移就成为连续的比例变换。

在唐寅的画中，山的深邃与宏大被连续的比例变换描绘出来。

Fig 32. 唐寅的雪山图

这种提升视野的手法在中国山水画李有着重要的地位，引导观众深入到画中。看一下公元 10 世纪时董源的山水画。

Fig 32. 董源山水画

还有董其昌的画

Fig 34. 青平山

许多中国山水画展现连续比例变换和相关的对称。
这里是更进一步的例子。

Fig 34.1

Fig 34.2

Fig 34.3

Fig 34.4

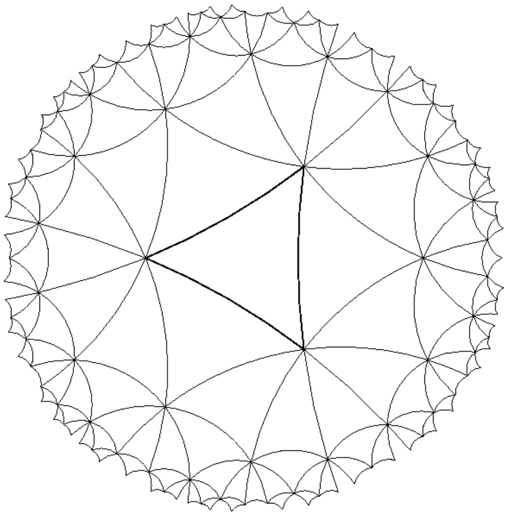
8 双曲镶嵌

到目前为止，我们集中于□^{2}中的平铺。另一类平铺在如下 Escher 给出图中

Fig 35. 双曲镶嵌

与下面的图作比较

Fig 35.1. 双曲镶嵌



另一张类似的图

Fig 36. Escher 的空间平铺

在这些照片中，瓷片在边界附近变得越来越小，并且他们看起来不是周期的。另一方面，他们都体现了和谐与均衡。我们可以证明当圆盘是庞卡莱圆盘（即具有常负曲率度量）时，那么这是周期的。另一方面，第二张图不是周期的，虽然通过比例变换，他们是局部对称。

另一个更简单的双曲平面模型是

$$\mathrm{H}^2 = \{x+iy \mid x \in R, y>0\} \cong SL(2,R)/SO(2)$$

其中

$$SL(2,R) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in R, ab-cd=1\}$$

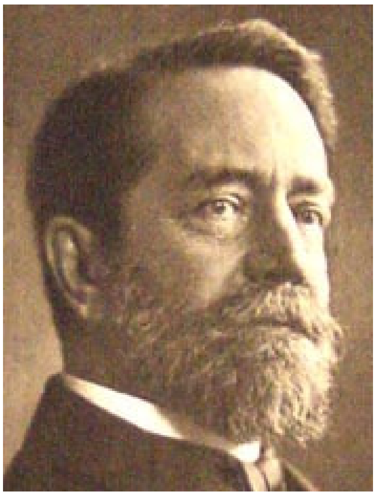
在圆盘模型中，群 $SL(2,R)$ 变成了 $SU(1,1)$。上面 Escher 的第一章图相对于 $SU(1,1)$ 的一个合适的离散子群是周期的。事实上，这个图将庞卡莱圆盘按照一个基本区域作了分解。

9 投影几何与绘画中的透视

在上面的讨论中，我们主要集中于平面□^{2}的对称。在上一节，我们考虑了双曲镶嵌的平铺的例子。

平面的曲率为零，双曲平面具有常负曲率－1。根据 23 岁的 Klein 在 1872 年提出的 Erlanger 纲领，它们是非常不同的几何。

Fig 37. Klein



在这个纲领中，几何由它的变换群所决定。在这个思想下，欧式平面几何与双曲几何都是射影几何的子集。参看[Kl, 第 38 章]。

令人惊讶的是，射影几何的发展受到绘画中的透视方法的很大影响。

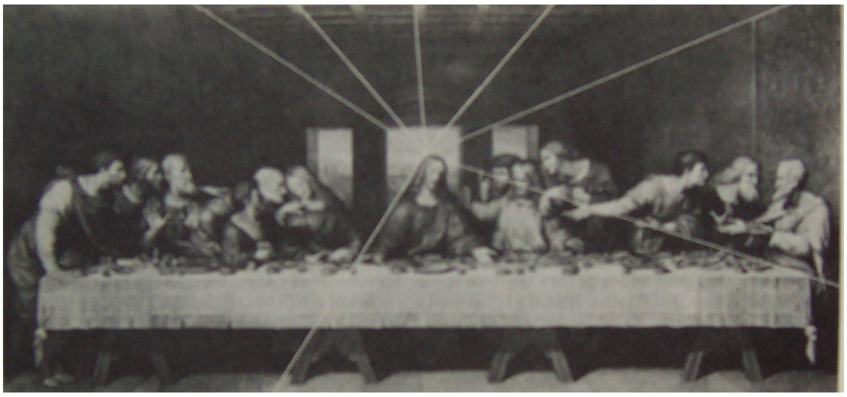
我们熟知，平面上两条平行线永不相交。另一方面，投影空间中的两条直线交于某一点。射影平面是通过在普通平面上加一个无穷远点得到的。在西方绘画中，这一点称为消失点，构成了画面的焦点，其它的事物都是根据这点出发的直线来描绘。

看一下达芬奇的“最后的晚餐”。

Fig 38. 最后的晚餐

Fig 38.a, 带直线的最后的晚餐

的。另一方面，他们是类似的，因为都收敛或趋向于无穷远处。



以及拉斐尔的画“雅典学派”

Fig 39. 雅典学派

Fig 39.a. 带透视线的画

在这幅图中，建筑物的深度清楚可见，是通过与中国画完全不同的手法得到的。另一方面，他们是类似的，因为都收敛或趋向于无穷远处。

10 特征值的美妙音符

对称或正则的概念在数学中非常重要，一个例子与著名的问题“听出一个鼓的形状”有关。这个问题最早由洛仑兹，后来由 Kac 在一篇著名的文章“Can you hear the shape of a drum?”中提出.

洛仑兹在 1910 年的根廷根大学提出一个问题，能够听出一个鼓的体积。这个问题被当时还是学生的 Weyl 解决，令人惊叹。这是 Weyl 伟大数学生涯的开始，对称是 Weyl 工作的一个主旋律。请参看文章[Ya1][Pe]。

Fig 40. Weyl

更精确的，这个问题可以叙述如下。给定□^{n}中的一个有界域Ω，具有良好的边界。考虑 Dirichlet 边值问题，

$$\Delta\varphi(x)=\lambda\varphi(x), x\in\Omega; \varphi(x)=0, x\in\partial\Omega$$

特征值构成了一个递增列$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots$。特征值对应于鼓$\Omega$的频率，也就是我们可以听到的音调。问题就是，是否鼓Ω的面积可以被这些特征值λ_i所决定。

著名的 Weyl 定理说，小于λ的特征值的个数按照$c_n\mathrm{vol}(\Omega)^{\frac{n}{2}}$形式增长，其中$c_n$是只依赖于维数的万有常数。从这个公式我们就可以看出特征值决定了$\mathrm{vol}(\Omega)$。

这个定理也可以表述为，正规化的特征值$c\lambda_i^{\frac{2}{n}}$在合理的常数c下，按照i增长。这是非常了不起的公式，因为特征的计算通常是很困难的，而且头几个特征值往往并不以对称或规则的模式出现。如我们在前面所讨论的，序列$1,2,\cdots$，是最对称的对象，自然的在艺术中占有一席之地。

一个自然的问题是，差$c\lambda_i^{\frac{2}{n}}-i$的行为如何。这个问题很复杂。它的分布很可能由某个更高层次的对称所支配，这是受到了我们下面将要讨论的黎曼 zeta 函数$\zeta(s)$的启发。

11 素数或齐达（zeta）函数的对称

素数 $2,3,5,7,11,\cdots$ 是最基本和重要的研究对象。可是它们在自然数列 $1,2,3,\cdots$ 中的分布看起来好像完全是随机的。研究它们的一个重要工具就是著名的黎曼 zeta 函数。

Fig 41. 黎曼

它定义在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 上，

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$

可以亚纯解析延拓到整个复平面上。我们把 $\xi(s)$ 规范化，得到

$$\xi(1-s)=\xi(s)\ \xi(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s)。$$

$\zeta(s)$ 或 $\xi(s)$ 的一个重要性质是下面的函数方程

$$\xi(1-s)=\xi(s)$$

即它关于直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 对称。这就反映出了序列 $1,2,3,\cdots$，或者说整个整数集合的对称性。让我惊讶的是，这个对称性质的证明与双曲镶嵌的对称性有关，也就是相对于模群 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的模性质。简而言之，双曲镶嵌要求在 $SL(2,R)$ 的离散子群（例如 $SL(2,\mathbb{Z})$）作用下的不变性，模形式满足 $SL(2,\mathbb{Z})$ 作用下的某些变换律。

模性的现象在数学和物理学中频繁出现。一个例子是郎兰兹纲领，即何有意义和实际的数的序列都是模性的，也就是说它们是一个模形式（或自守表示）的系数。一个著名的例子就是怀尔斯关于费马大定理的证明。另一个重要的例子是 Borcherds[Bo]证明的大魔群的月光猜想，他为此得到了 1998 年的菲尔兹奖。

这也可以解释为数学和自然科学中无处不在的对称。

Zeta 函数的零点 $\zeta(s)$ 在素数分布的研究中特别重要。著名的黎曼猜测说，它的所有非平凡零点都出现在对称线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 上。这是美国克雷数学研究所悬赏百万美元的难题。

对称性在 $\zeta(s)$ 的零点分布方面发挥了重要的作用。事实上，在合理的正规化以后，零点的分布可以用李群来控制，李群也支配了随机矩阵特征值的间隔。

12 李群与物理

对称与李群在物理学中有许多应用。在物理学中的应用在极大刺激了群伦的发展。事实上，量子力学极大影响了李群表示论的发展。

对称可以在物理学中从多个层面上观察到。例如，在牛顿力学中，包括万有引力定律在内的许多定律都在平移，旋转和反射下保持不变。

在广义相对论中，对称性由洛伦兹群（或庞卡莱群）所支配。狭义相对论的一个重要特征就是空间与时间的观念是对称的。其实，伟大的物理学家 Dirac 对杨振宁说过，这个概念也许是爱因斯坦对物理学最大的贡献（参考[Ya2, p.23]）。

对称性在物理中的一个非常重要的应用是，可以从对称推出守恒律，这是历史上最著名的女数学家 Emmy Noether 证明的。比如，空间中的平移对称（或不变性）可以推出动量的守恒律，时间的平移不变性可以推出能量的守恒律。参考[LH]，有一个很友好的关于 Noether 定理及其应用的讨论。Noether 定理的严格的数学表述，请参考[Mr, Theorem 11.4.1. p.330]。

如我们在文章开头所讨论的那样，反射对称在艺术中也普遍存在。可是在物理中，这是最复杂的问题，有时甚至是错误的。两个分别发生在右手坐标和左手坐标系里的物理现象称为宇称守恒。事实上，杨振宁和李政道在 1956 年提出，在弱作用领域，宇称是不守恒的。他们为此在 1957 年获得诺贝尔物理学奖，它们的发现被著名华裔女物理学家吴健雄用实验证实。参考[Lee]中关于物理学中弱作用的介绍。

对称性（或群论）在物理学中的另一个了不起的应用是关于亚原子粒子（称为八重道粒子）的分类规划，这种命名来自于佛教中的八正道（Eightfold Way），这是佛教认为可以达到至善至美的中庸之道。为了解释这一规划，Gell-Mann 引入了基本夸克，使他在 1969 年获得了诺贝尔物理学奖。

简单的说，一个粒子对应于希尔波特空间上哈密尔顿作用的特征函数。如果一个李群保持哈密尔顿作用（或与之交换），那么哈密尔顿作用的特征空间就是表示空间。同一个特征空间中的状态有许多共同的性质。除了有时出现的退化现象，特征空间给出了群的所有不可约表示，并且术语一个不可约子空间的特征函

数（或状态）自然的形成初等粒子的多重态。在 1960 年代初期，许多新的亚原子结构被发现，可是缺少一致的组成结构。李群 $SU(3)$ 的加权空间分解给出了粒子多重态的参数化。一个相关的特别重要的表示是李代数 $su(3)$ 的伴随表示，它是八维的，所以命名为八重道。一些新的粒子最早就是由这个分类所预言，后来由实验加以证实。

除了这些和 $SU(3)$ 的平凡表示，只有另一个 10 维的表示很自然的出现。$SU(3)$ 在 $\mathbb{C}^3$ 上的标准表示并不出现。这个标准表示中的三个权向量被 Gell-Mann 称为夸克。对表示的标准运算，如取张量和对称积可以用来解释和澄清亚原子粒子的某些结构。在这个意义下来说，$SU(3)$ 代表了宇宙的对称（或者更加谦虚的说，代表了亚原子世界的对称）。详细请参看[St, Chap 5]。

对称在物理中的其它应用，请看杨振宁先生的文章[Ya2]。

13 对称空间

在上面的各节中，我们讨论了欧氏空间，双曲平面（即庞卡莱圆盘）中的对称物体和对称模式。

虽然前面没有提，可是直觉告诉我们，这些空间一定是对称的，至少具有丰富的对称性质。事实上，这个条件是必要的。

我们发现，他们是一类非常重要，被称为对称空间的黎曼流形的两个实例。对称空间的定义比对称物体的定义要复杂得多。我们只作简要讨论。

在 $\mathbb{R}^n$ 中，任意两个都没有区别，因为我们总可以用一个等距平移把一个点变到另一个点。具有这种性质的空间称为齐性空间。在 $\mathbb{R}^n$ 中，一个更强的性质是，任意两点处的任意两个方向都是一样的，也就是说可以用一个等距，把一个方向变到另一个方向。这些性质双曲平面也同样具有，可是这还不是对称空间的正确定义。

对称空间的正确定义是说，在每一个点处，相对于它的反射都是空间的整体等距。我们很容易验证欧氏空间和双曲平面是对称空间。

对称空间的另一个重要例子是复平面 $\mathbb{C}^2$，但它不满足上面两个条件。

对称空间定义以后，一个自然的问题是，是否它们与李群相关，我们已经强调过李群是对称概念的严格数学基础。回答当然是肯定的，对称空间与李群的关系仍然是数学中的一个活跃的研究领域。比如，朗兰兹纲领的几何背景就由对称空间及其商空间构成。

14 注记

对称在许多场合中出现。完美的上帝创造完美的宇宙，对称是其中的重要一

环。完美的理想化总是通过对称表现出来。

本文中有许多专题并未提及。其实，关于对称的不同方面都有许多的专著。这里是向读者推荐一些。

Weyl 有一本经典的书[We]。一本最近和比较容易的书是 Walser 撰写的[Wa]。几本其它关于对称的书是 Istvan 和 Magolna Hargitta 写的[HH]，Lederman 和 Hill 的[Le]，Rosen 的[Ro]，以及 Jablan 的[Ja]。

对于在化学中的应用的比较轻松的介绍，请看 Heibronner 和 Dunitz 的书[HD]。几何与对称在艺术和生活中的应用请看 Ghyka 的[Gh]。

关于物理学中的对称，请看 Feynman 的书[Fe]，还有 Wigne 的[Wi]，以及前面提到过的杨振宁的文章[Ya2]。

参考文献

[Ar] M.Armstrong, Groups and symmetries, Springer, 1988.

[Co] H.Coxeter, Regular polytopes, The Macmillan Co., 1963.

[Cr] P.Cromwell, Polyhedra, Cambridge University Press, 1997.

[De] K.Devlin, Mathematics: the science of patterns, Scientific American Library, 1997.

[Fe] R.Feynman, The character of physical law, The Modern Library, 1994.

[Gh] M.Ghyka, The geometry of art and life, Dover 1977.

[HSP] T.Hales, P.Sarnak, M.Pugh,
Advances in random matrix theory, zeta functions, and sphere packing,
Proc. Natl. Acad. Sci. USA 97 (2000) 12963-12964.

[HH]I.Hargitta, M.Hargitta, Symmetry: A Unifying Concept, Shelter Publications, Inc, 1994.

[HD] E.Heilbronner, J.Dunitz, Reflections on symmetry,
Verlag Helvetica Chimica Acta, Basel, 1993.

[Ja]{ja}S.Jablan, Theory of symmetry and ornament},
Beograd, Matematicki Institut, 1995.

[Ka] M.Kac, Can one hear the shape of a drum, Amer. Math. Monthly 73 (1966) no. 4, part II, 1-23.

[KS] N.Katz, P.Sarnak, Zeroes of zeta functions and symmetry,
Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1999) 1-26.

[Kl1] M.Kline, Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford University Press, 1972.

[Kl2] M.Kline, Mathematics in western culture, Oxford University Press, 1953.
[Li] M.Livio, The golden ratio, Broadway Books, 2002.

[Le] L.Lederman, C.Hill, Symmetry and the beautiful universe, Promethus Books, 2004.

[Lee] T.D.Lee, The weak interaction: its history and impact on physics, in The Oskar Klein memorial lectures, vol. 3, ed. by L.Bergstrom and U.Lindstrom, pp. 1-31, World Scientific, 2001.

[MR] J.Marsden, T.Ratiu, Introduction to mechanics and symmetry, Springer, 1994.

[Pe] R.Penrose, Hermann Weyl, space-time and conformal geometry, in Hermann Weyl, 1885-1985}, ed. by K.Chandrasekharan, Springer, 1986, pp. 23-52.

[Ro] J.Rosen, Symmetry discovered, Dover, 1998.

[Sh] L.Shlan, Arts \& physics, Perennial, 1993.
[SK] A.Shubinikov, V.Koptsik, Symmetry in science and art, Plenum Press, 1974.

[St] S.Sternberg, Group theory and physics, Cambridge University Press, 1994.

[SG] Ian Stewart and Martin Golubitsky, Fearful symmetry :is God a geometer?, Oxford University Press, 1992.

[Wa] H.Walser, Symmetry, a volume in MAA Spectrum, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2000. xii+95 pp.

[We] H.Weyl, Symmetry}, in Princeton Science Library, Princeton University Press, 1989.

[Wi] P.Wigner, Symmetries and reflections, Indiana University Press, 1967.

[Ya1] C.N.Yang, Hermann Weyl's contribution to physics, in Hermann Weyl, 1885-1985}, ed. by K.Chandrasekharan, Springer, 1986, pp. 7-21.

[Ya2] C.N.Yang, Symmetry and physics}, in The Oskar Klein memorial lectures, vol. 1, ed. by G.Ekspong, pp. 11-33, World Scientific, 1991.

[Ze] A.Zee, Fearful symmetry, in Princeton Science Library, Princeton University Press, 1999.